ลอจิกและพีชคณิตบูลีน

(Logic and Boolean Algebra)

1. สมการลอจิก (Logic Expression)

การทำงานของระบบดิจิตอล สามารถอธิบายได้โดยใช้สมการพีชคณิตลอจิก (Logic Equation) ซึ่งประกอบด้วย

<u>ตัวแปรลอจิก</u> (Logic Variable) เป็นตัวแปรที่รับค่าเพียงสองค่า หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวแปรสองสถานะ (Bi-State Variable) โดยมีข้อกำหนดคือ สามารถมีสถานะได้เพียงสองสถานะเท่านั้น และจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งเท่านั้น จะอยู่พร้อมกันทั้งสองสถานะในเวลาเดียวกันไม่ได้ สถานะดังกล่าวอาจแทนความหมายต่าง ๆ เช่น เปิด-ปิด, สูง-ต่ำ, หนึ่ง-ศูนย์ เป็นต้น

<u>ตัวกระทำทางลอจิก</u> (Logic Operators) เป็นตัวรับเอาตัวแปรลอจิกมาดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ โดยผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกระทำและสถานะของตัวแปรลอจิกที่ถูกกระทำ เขียนแทนด้วยไดอะแกรมได้ดังภาพ

ตัวแปรอินพุท 1 ตัว สามารถทำให้เกิดสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี เช่น ตัวแปร A มีสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี คือ A = 0 หรือ A = 1 เมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรอินพุทเป็น 2 ตัว เช่น A และ B สถานะที่แตกต่างกันจะเพิ่มเป็น 4 กรณี หรือ 2^2 กรณี คือ A = 0 , B = 0 หรือ A = 0 , B = 1 หรือ A = 1 , B = 0 และ A = 1 , B = 1

ดังนั้นถ้ามีตัวแปรอินพุทจำนวน n ตัว จะสถานะที่แตกต่างกันทั้งหมด 2^n กรณี

ตัวกระทำทางลอจิกพื้นฐานได้แก่ AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR และ XNOR

2. ตารางค่าความจริง (Truth Table)

เป็นตารางแสดงความสัมพันธ์ค่าตรรกะระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่เป็นไปได้ทั้งหมด ที่เกิดจากสมการลอจิก

ตารางค่าความจริง ประกอบด้วย ค่าสถานะของตัวแปรอินพุตที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2^n กรณี เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปรลอจิกด้านอินพุต และสถานะของตัวแปรด้านเอาต์พุตที่เกิดจากการกระทำทางลอจิกระหว่างตัวแปรด้านอินพุตค่าต่าง ๆ

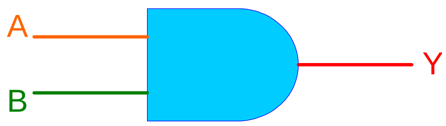
3. ลอจิกเกต (Logic Gate)

ลอจิกเกต (Logic Gate) คือ อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีการทำงานเหมือนสวิตช์ (Switch) นั่นคือ มีสถานะเปลี่ยนแปลงไปมาได้เพียง 2 สถานะ โดยใช้ระดับแรงดันไฟฟ้าในการแทนสถานะของตัวแปรลอจิก โดยแรงดันไฟฟ้าสูง (High : H) และแรงดันไฟฟ้าต่ำ (Low : L) แทนระดับลอจิก 0 และ 1 ตามลำดับ

ลอจิกเกตพื้นฐานที่ควรศึกษาได้แก่

3.1 AND Gate

สัญลักษณ์



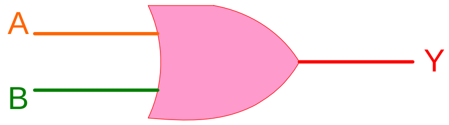
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A \cdot B$

ตารางค่าความจริง

Input		**Output**
A	**B**	**f(A,B) = A•B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.2 OR Gate

สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก Y = f(A,B) = A+B

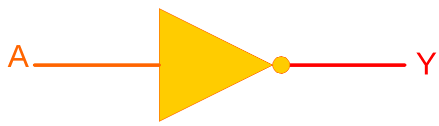
ตารางค่าความจริง

Input		**Output**
A	**B**	**f(A,B) = A+ B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3.3 NOT Gate (Inverters)

เป็นอุปกรณ์ที่มีเพียงหนึ่งอินพุต โดยทำหน้าที่กลับค่าลอจิกที่ได้จากอินพุต

สัญลักษณ์



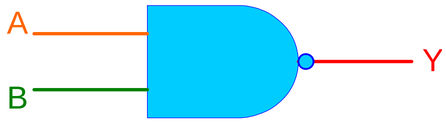
สมการพีชคณิตลอจิก Y = f(A,B) = A+B

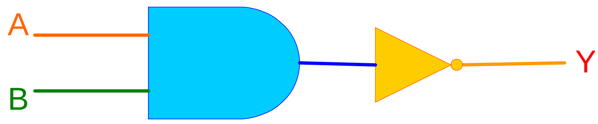
ตารางค่าความจริง

Input **A**	**Output** **f(A,B) =** $\overline{A}$
0	1
1	0

3.4 NAND Gate

สัญลักษณ์





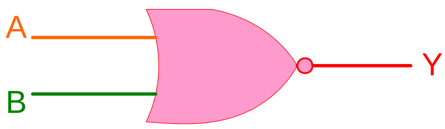
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A \cdot B}$

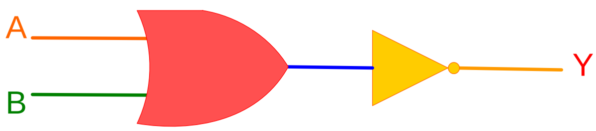
ตารางค่าความจริง

Input		**Output**
A	**B**	**f(A,B) =** $\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3.4 NOR Gate

สัญลักษณ์





สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A) = \overline{A + B}$

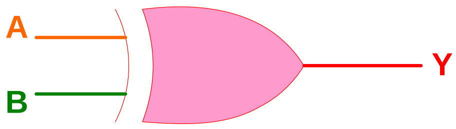
ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	**B**	**f(A,B) =** $\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

3.5 Exclusive - OR Gate

เป็นนำเกตพื้นฐานมาประยุกต์ใช้งาน จะให้ผลลัพธ์เป็น “1” เมื่ออินพุตมีค่าตรงกันข้ามกัน

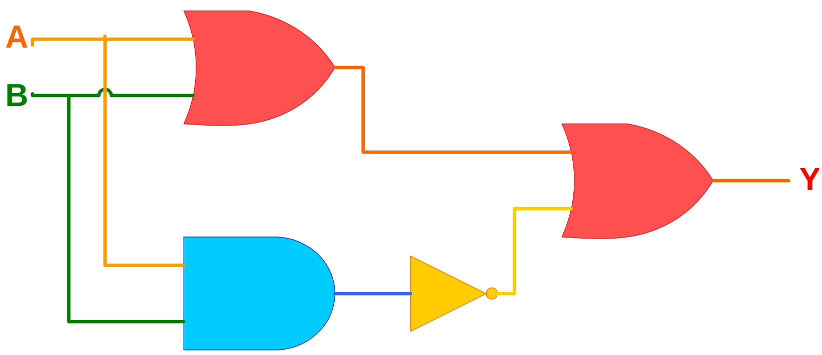
สัญลักษณ์



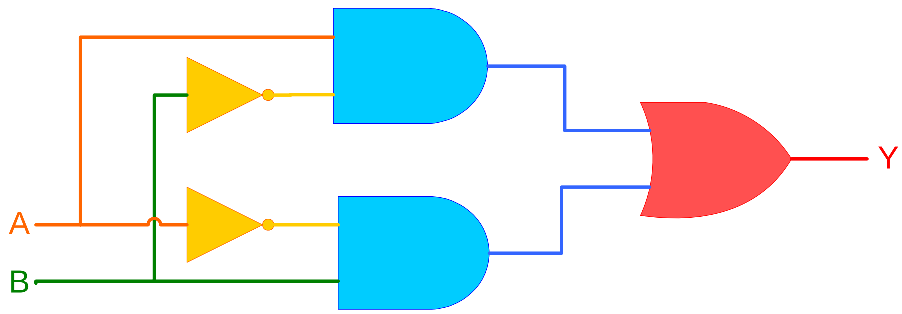
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A) = A \oplus B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	**B**	**f(A,B) =** $A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$Y = f(A) = A \oplus B = (A+B)\cdot\overline{(A\cdot B)}$$

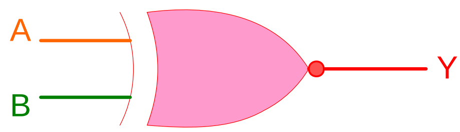


$$Y = f(A) = A \oplus B = \left(A \cdot \overline{B}\right) + \left(\overline{A} \cdot B\right)$$

3.6 Exclusive – NOR Gate (XNOR Gate)

เกิดจากการนำ Inverter มาต่อกับ XOR Gate ทำให้ค่าผลลัพธ์ที่ได้เกตชนิดนี้ มีค่าตรงกันข้ามกับ XOR Gate ทันที ดังนั้น เกตชนิดนี้จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “Comparator”

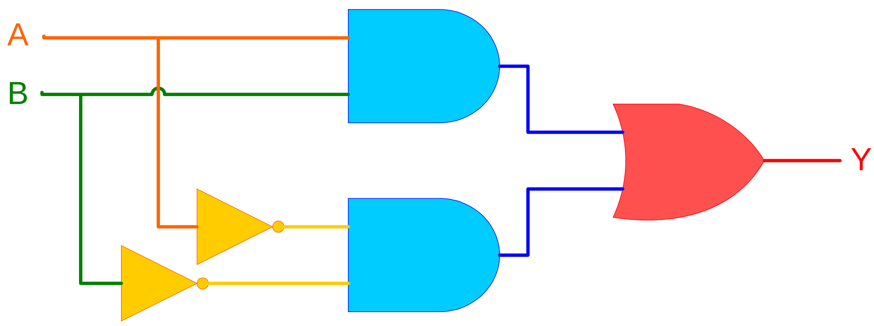
สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A \oplus B}$

ตารางค่าความจริง

Input		**Output**
A	**B**	**f(A,B) =** $\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Y = f(A,B) = $\overline{A \oplus B} = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot \overline{B})$

ตัวอย่าง

- การเขียนสมการพีชคณิตจากวงรลอจิก
- การเขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิต
- การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อหาเอาต์พุตของสมการลอจิก

4. รูปแบบมาตรฐานของสมการลอจิก (Standard Form of Logic Expression)

สมการลอจิก มีรูปแบบมาตรฐาน 2 แบบคือ ผลรวมของผลคูณ (Sum of Products Equation, SOP) และ ผลคูณของผลรวม (Product of Sum Equation, POS)

4.1 สมการลอจิกแบบผลรวมของผลคูณ (Sum of Products Equation, SOP)

เป็นการแสดงค่าผลคูณของพีชคณิตลอจิกของตัวแปรตั้งแต่สองตัวขึ้นไปด้วยฟังก์ชัน AND (เรียกได้ว่าเป็น “Product Term”) แล้วนำผลคูณแต่ละส่วนมารวมกันโดยใช้ฟังก์ชัน OR เช่น

$$y = f(A,B,C,D) = AB + ABC + AB\overline{C}\,\overline{D}$$

Product Term ที่เกิดจากการ AND กันของตัวแปรทุกตัวแปรที่เกี่ยวข้องในสมการ เรียกว่า “Minterm” ดังนั้น สมการลอจิกที่เกิดจากการ OR กันของ Minterm จึงเรียกว่าเป็นสมการแบบ *“Sum of Minterm”*

ตัวอย่างเช่น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปรแบบ SOP ของ Minterm แสดงได้เป็น

$$y = f(A,B,C) = A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

การเขียน Minterm สามารถเขียนในรูปเลขฐานสอง (Binary Code) โดยมีข้อ ตกลงดังนี้

Uncomplement Variable เช่น $A, B, C, \ldots$ เขียนแทนด้วย 1

Complement Variable เช่น $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$ เขียนแทนด้วย 0

นอกจากนี้ ยังสามารถเขียน Minterm ในรูปของ Minterm Number โดยแทนด้วยตัวอักษรย่อ m_i เมื่อ i คือ เลขฐานสิบที่มีค่าเท่ากับ Binary Code ของ Minterm นั้น

จากสมการลอจิกข้างต้น เราสามารถเขียน Minterm ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ดังตาราง

Minterm	**Binary Code**	**Minterm Number**
$A\overline{B}\overline{C}$	100	m_4
$A\overline{B}C$	101	m_5
$\overline{A}BC$	011	m_3
ABC	111	m_7

ดังนั้น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปร เขียนได้เป็น

$$f(A,B,C) = 011 + 100 + 101 + 111$$

หรือ

$$f(A,B,C) = \sum m(3,4,5,7)$$

และสามารถเขียนตารางค่าความจริงของสมการลอจิกแบบ SOP ข้างต้น ได้ดังนี้

Input			**m_3** $\overline{A}BC$	**m_4** $A\overline{B}\overline{C}$	**m_5** $A\overline{B}C$	**m_7** ABC	**Output** $f(A,B,C)$
A	**B**	**C**					
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1

จากตารางค่าความจริง จะเห็นว่า Minterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 1 คือ Minterm ที่เกี่ยวข้องในสมการลอจิก ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการลอจิกแบบ SOP ของ Minterm ได้จากการรวม Minterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 1 จากตารางค่าความจริง

4.2 สมการลอจิกแบบผลคูณของผลรวม (Product of Sum Equation, POS)

เป็นการแสดงค่าผลรวมของพีชคณิตลอจิกของตัวแปรตั้งแต่สองตัวขึ้นไปด้วยฟังก์ชัน OR (เรียกได้ว่าเป็น “Sum Term”) แล้วนำผลคูณแต่ละส่วนมาคูณกันโดยใช้ฟังก์ชัน AND เช่น

$$y = f(A,B,C) = (A+B)(A+\overline{B}+C)$$

Sum Term ที่เกิดจากการ OR กันของตัวแปรทุกตัวแปรที่เกี่ยวข้องในสมการ เรียกว่า “Maxterm” ดังนั้น สมการลอจิกที่เกิดจากการ AND กันของ Minterm จึงเรียกว่าเป็นสมการแบบ *“Sum of Maxterm*”

ตัวอย่างเช่น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปรแบบ POS ของ Maxterm แสดงได้เป็น

$$y = f(A,B,C) = (A+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(A+B+C)$$

การเขียน Maxterm สามารถเขียนในรูปเลขฐานสอง (Binary Code) โดยมีข้อตกลงดังนี้

Uncomplement Variable เช่น $A, B, C,...$ เขียนแทนด้วย 0
Complement Variable เช่น $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C},...$ เขียนแทนด้วย 1

นอกจากนี้ ยังสามารถเขียน Maxterm ในรูปของ Maxterm Number โดยแทนด้วยตัวอักษรย่อ M_i เมื่อ i คือ เลขฐานสิบที่มีค่าเท่ากับ Binary Code ของ Maxterm นั้น

จากสมการลอจิกข้างต้น เราสามารถเขียน Maxterm ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ดังตาราง

Minterm	Binary Code	Maxterm Number
$\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$	011	M_3
$\left(A+\overline{B}+C\right)$	010	M_2
$\left(\overline{A}+B+C\right)$	100	M_4
$\left(A+B+C\right)$	000	M_0

ดังนั้น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปร เขียนได้เป็น

$$f(A,B,C)=(000)(010)(011)(100)$$

หรือ

$$f(A,B,C)=\prod M\left(0,2,3,4\right)$$

และสามารถเขียนตารางค่าความจริงของสมการลอจิกแบบ POS ข้างต้น ได้ดังนี้

Input			**M_0** $\left(A+B+C\right)$	**M_2** $\left(A+\overline{B}+C\right)$	**M_3** $\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$	**M_4** $\left(\overline{A}+B+C\right)$	**Output** $f\left(A,B,C\right)$
A	**B**	**C**					
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

จากตารางค่าความจริง จะเห็นว่า Maxterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 0 คือ Maxterm ที่เกี่ยวข้องในสมการลอจิก ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการลอจิกแบบ POS ของ Maxterm ได้จากการรวม Maxterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 0 จากตารางค่าความจริง

Combination Logic

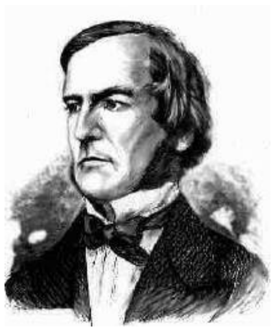
สมการลอจิกเกตและวงจรลอจิกเกตของวงจรแบบ Combination Logic มีจำนวนลอจิกเกตที่ต่ออยู่ในวงจรเป็นจำนวนมาก ส่งผลให้วงจรที่สร้างได้มีขนาดใหญ่ ทำให้ยุ่งยากต่อการสร้างและทำให้ต้นทุนในการผลิตสูง นอกจากนี้ยังทำให้การ วิเคราะห์วงจรเป็นไปอย่างยากลำบาก

การลดรูปสมการลอจิกเกตให้มีรูปแบบที่ง่ายและประหยัด (Minimization) จึงเป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ซึ่งจะส่งผลให้วงจรลอจิกที่สร้างได้มีจำนวนลอจิกเกตลดลง ลดต้นทุนในการผลิต และทำให้การวิเคราะห์ง่ายขึ้น

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงวิธีในการลดรูปวงจรลอจิกเกตที่สำคัญก่อน 2 วิธี ได้แก่ การลดรูปโดยใช้พีชคณิต Boolean (Boolean algebra) และการใช้แผนผัง Kanaugh (Kanaugh Map หรือ K's Map)

1. Boolean Algebra Method

เป็นพีชคณิตที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรแบบลอจิก โดยอาศัยตัวดำเนินการทางลอจิกต่าง ๆ ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ จอร์ช บลู (George Boole, 1815-1864) กฎของพีชคณิตบูลีน (Law of Boolean Algebra) ที่สำคัญได้แก่



1. กฎการตรงกันข้าม (Complement Law)

$A \cdot \overline{A} = 0$ $\quad$ $A + \overline{A} = 1$

2. คุณสมบัติของศูนย์

$0 \cdot A = 0$ $\quad$ $0 + A = A$

3. คุณสมบัติของหนึ่ง

$1 \cdot A = 1$ $\quad$ $1 + A = 1$

2. กฎการสลับที่ (Commutative Laws)

$A + B = B + A$ $\quad$ $A \cdot B = B \cdot A$

3. กฎการจัดหมู่ (Associative Laws)

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

4. กฎการกระจาย (Distributive Law)

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

5. กฎของเอกลักษณ์ (Identify Law)

$$A + A = A \qquad A \cdot A = A$$

6. กฎการลบล้าง (Negation)

$$\overline{A} = \overline{A} \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

7. กฎการลดทอน (Redundancy Law)

$$A + A \cdot B = A \qquad A + \overline{A} + B = A + B$$
$$A \cdot (A + B) = A \qquad A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

8. ทฤษฎีของดีมอร์แกน (Demorgan's Theorems)

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

จากกฎพื้นฐานของพีชคณิตเหล่านี้ เราสามารถนำไปช่วยในการลดรูปของสมการลอจิกได้ ทำให้วงจรลอจิกที่ได้มีขนาดเล็กลง และต้นทุนในการผลิตต่ำ ทั้งยังส่งผลให้สามารถทำงานได้รวดเร็วขึ้น เนื่องจากสัญญาณอินพุตผ่านลอจิกเกตจำนวนน้อยก่อนการเกิดเป็นสัญญาณเอาท์พุต

2. Karnaugh Map

2.1 การเขียน K-Map

การเขียน K-Map จะเขียนในรูปตารางของค่า Minterm (Maxterm) ของ สมการลอจิก ลักษณะของ K-Map จะขึ้นอยู่กับลักษณะของตัวแปรอินพุตของสมการ ลอจิก โดย K-Map จะช่วยลดรูปสมการลอจิกที่มีตัวแปรตั้งแต่ 2-6 ตัวแปร

การเขียนแผนผังของคาร์โนห์สำหรับ 2 ตัวแปร

A *A*

B *B*

0 $\overline{A}$

1 *A*

0 $\overline{B}$

00 0

10 2

1 *B*

01 1

11 3

แผนภาพแสดงแผนผังของคาร์โนห์ 2 ตัวแปร

A *A*

B *B*

0 0

1 *1*

0 0

$\overline{A}\,\overline{B}$ $A+B$

$A\overline{B}$ $\overline{A}+B$

1 *1*

$\overline{A}B$ $A+\overline{B}$

AB $\overline{A}+\overline{B}$

การเขียนฟังก์ชันในรูป Minterm และ Maxterm

การเขียนแผนผังของคาร์โนห์สำหรับ 3 ตัวแปร

C \ AB		C \ AB
00		$\overline{A}\,\overline{B}$
01		$\overline{A}B$
11		AB
10		$A\overline{B}$
	0	$\overline{C}$
000		0
010		2
110		6
100		4
	1	C
001		1
011		3
111		7
101		5

แผนภาพแสดงแผนผังของคาร์โนห์ 3 ตัวแปร

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	$A+B+C$	$A+\overline{B}+C$	$\overline{A}+\overline{B}+C$	$\overline{A}+B+C$
1	$A+B+\overline{C}$	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+B+\overline{C}$

การเขียนฟังก์ชันในรูป Minterm และ Maxterm

การเขียนแผนผังของคาร์โนห์สำหรับ 4 ตัวแปร

AB *AB*

CD *CD*

00 $\overline{A}\,\overline{B}$

01 $\overline{A}B$

11 AB

10 $A\overline{B}$

00 $\overline{C}\,\overline{D}$

0000 0

0100 4

1100 12

1000 8

01 $\overline{C}D$

0001 1

0101 5

1110 13

1001 9

11 CD

0011 3

0111 7

1111 15

1011 11

10 $C\overline{D}$

0010 2

0110 6

1110 14

1010 10

แผนภาพแสดงแผนผังของคาร์โนห์ 4 ตัวแปร

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$
01	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$AB\overline{C}D$	$A\overline{B}\overline{C}D$
11	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}BCD$	$ABCD$	$A\overline{B}CD$
10	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$ABC\overline{D}$	$A\overline{B}C\overline{D}$

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	$A+B+C+D$	$A+\overline{B}+C+D$	$\overline{A}+\overline{B}+C+D$	$\overline{A}+B+C+D$
01	$A+B+C+\overline{D}$	$A+\overline{B}+C+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	$\overline{A}+B+C+\overline{D}$
11	$A+B+\overline{C}+\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$
10	$A+B+\overline{C}+D$	$A+\overline{B}+\overline{C}+D$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$	$\overline{A}+B+\overline{C}+D$

การเขียนฟังก์ชันในรูป Minterm และ Maxterm

2.2 การลดรูปสมการลอจิกด้วย K-Map

1. ใส่ค่าลอจิกลงในผังของคาร์โนห์ (กรณีของ Minterm ใส่ลอจิก “1” กรณีของ Maxterm ใส่ลอจิก “0”

2. รวมเทอมที่อยู่ติดกันโดยจัดกลุ่มได้ครั้งละ 2n ช่อง (1, 2, 4, 8, 16) ให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เทอมที่ถูกจับกลุ่มไปแล้ว สามารถนำไปจับกลุ่มกับตัวอื่นได้อีกเพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุดจนหมดช่องที่เป็น "1" (หรือช่องที่เป็น 0)

3. เมื่อจับกลุ่มได้แล้วให้มองหาผลลัพธ์ โดยบอกว่า ในกลุ่มมีตัวแปรอะไรซ้ำกันบ้างและนำตัวแปรที่ซ้ำกันนั้นมา AND กัน (ในกรณีจับกลุ่มลอจิก "1") หรือนำตัวแปรที่ซ้ำกันนั้นมา OR กัน (ในกรณีจับกลุ่มลอจิก "0")

4. ในการจับกลุ่มลอจิก "1" ผลลัพธ์สุดท้ายได้จากการนำเอาผลลัพธ์แต่ละตัวมา OR กัน

5. ในการจับกลุ่มลอจิก "0" ผลลัพธ์สุดท้ายได้จากการนำเอาผลลัพธ์แต่ละตัวมา AND กัน

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ลดรูปสมการพีชคณิตบูลีนต่อไปนี้ ด้วยแผนผังคาร์โนห์

1) $Y = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$

A B	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}$	$A\overline{B}$
B	$\overline{A}B$	AB

A B	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	
B	1	

$Y = \overline{A}$

2) $Y = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB$

A B	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}$	$A\overline{B}$
B	$\overline{A}B$	AB

A B	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	
B	1	1

$Y = \overline{A} + B$

3) $Y = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$

A B	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A}+B$
B	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$

A B	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	0	0
B	0	0

$Y = 0$

4) $Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C$

C \ AB	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\overline{C}$
C	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

C \ AB	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	1			1
C	1			1

$Y = \overline{B}$ ……………….**Ans.**

5) $Y = \sum m(0,2,3,5,7)$

C \ AB	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	0	2	6	4
C	1	3	7	5

C \ AB	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	1	1		
C		1	1	1

$$Y = \overline{A}\overline{C} + BC + AC$$ ……………….**Ans.**

6) $Y = \prod m(1,2,5,6)$

C \ AB	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$\overline{C}$	0	2	6	4
C	1	3	7	5

C \ AB	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$	$A+B$	$A+\overline{B}$
$\overline{C}$		0	0	
C	0			0

$$Y=(B+\overline{C})(\overline{B}+C) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{\textit{Ans.}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ลดรูปสมการพีชคณิตบูลีนต่อไปนี้ ในรูปของ Minterm และ Maxterm ด้วยแผนผังคาร์โนห์

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1) Minterm $\quad Y=\sum m(2,3,4,6,7)$

C \ AB	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	0	2	6	4
C	1	3	7	5

$\Downarrow$

C \ AB	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$		1	1	1
C		1	1	

$$Y=A\overline{C}+B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{\textit{Ans.}}$$

2) Maxterm $Y = \prod M(0,1,5)$

C	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$\overline{C}$	0	2	6	4
C	1	3	7	5

AB C	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$	$A+B$	$A+\overline{B}$
$\overline{C}$	0			
C	0			0

$Y = (A+B)(B+\overline{C})$ ……………….***Ans.***

A	***B***	***C***	***D***	***Y***
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

1) Minterm $Y = \sum m(0,1,3,7,8,9,10,11,14,15)$

$CD \backslash AB$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\,\overline{D}$	0	4	12	8
$\overline{C}D$	1	5	13	9
CD	3	7	15	11
$C\overline{D}$	2	6	14	10

$CD \backslash AB$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}\,\overline{D}$	1			1
$\overline{C}D$	1			1
CD	1	1	1	1
$C\overline{D}$			1	1

$Y = AC + \overline{B}\,\overline{C} + CD$ ……………………………***Ans.***

2) Maxterm $Y = \prod M(2,4,5,6,12,13)$

$CD \backslash AB$	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$\overline{C}+\overline{D}$	0	4	12	8
$\overline{C}+D$	1	5	13	9
$C+D$	3	7	15	11
$C+\overline{D}$	2	6	14	10

CD \ AB	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$C+D$		0	0	
$C+\overline{D}$		0	0	
$\overline{C}+\overline{D}$				
$\overline{C}+D$	0	0		

$Y=(A+\overline{C}+D)(\overline{B}+C)$ **…………………………..*Ans.***

*** จากตัวอย่างจะเห็นว่า ในกรณีที่เอาต์พุตจากตารางค่าความจริงมีค่าเป็น “1” มากกว่า “0” การหาเทอมในรูปของ Minterm จะหาง่ายกว่าเพราะมีจำนวนเทอมน้อยกว่า และยังสามารถนำวิธีการเขียนฟังก์ชันแบบ Complement เพื่อให้ได้ Maxterm ดังตัวอย่าง

CD \ AB	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$\overline{C}+\overline{D}$		0	0	
$\overline{C}+D$		0	0	
$C+D$				
$C+\overline{D}$	0	0		

$$\overline{Y}=\overline{A}C\overline{D}+B\overline{C}$$
$$\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{A}C\overline{D}+B\overline{C}}$$
$$Y=(\overline{\overline{A}C\overline{D}})(\overline{B\overline{C}})$$
$$Y=(A+\overline{C}+D)(\overline{B}+C)$$ **……………………………..*Ans.***